DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Toutes les matrices considérées dans le problème sont à coefficients réels. On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre de celles d'entre elles qui sont carrées à n^2 éléments ($n \geqslant 1$) et, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on identifie A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'elle définit pour la base canonique de cet espace, ce qui autorise à considérer l'image Im A et le noyau Ker A de la matrice. Pour tout exposant entier $d \geqslant 1$ on définit A^d par $A^d = A\,A^{d-1}$, avec $A^0 = I_n$, matrice unité de l'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, c'est-à-dire appartenant au groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ on note A^{-1} l'inverse de A.

I

Dans cette partie, on considère un groupe multiplicatif $\mathcal{G}$, non réduit à $\{0\}$, et contenu dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On souligne qu'en général $\mathcal{G}$ n'est pas un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et peut ainsi contenir des matrices de rang $r < n$. Cependant toute matrice $A \in \mathcal{G}$ admet, pour la multiplication des matrices, un inverse dans $\mathcal{G}$; on notera A' cet inverse. Autrement dit, il existe dans $\mathcal{G}$ un élément neutre E, éventuellement différent de I_n, et tel que, pour tout $A \in \mathcal{G}$, on ait $AE = EA = A$ et $AA' = A'A = E$.

1. Montrer que tous les éléments de $\mathcal{G}$ ont le même rang $r \geqslant 1$.

2.a. Montrer que $\mathbb{R}^n$ est la somme directe de Im E et Ker E.

b. Montrer que, si $r < n$, E est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice unité de $\mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$. Que vaut E si $r = n$?

c. En déduire que, si $r < n$, toute matrice $A \in \mathcal{G}$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in GL_r(\mathbb{R})$. Pour chaque entier $r \in [1, n]$, caractériser les groupes $\mathcal{G}$ de matrices de rang r à l'aide des sous-groupes de $GL_r(\mathbb{R})$.

3.a. Soit A une matrice non nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir l'équivalence des cinq propriétés suivantes :

(i) A appartient à un groupe multiplicatif $\mathcal{G}$.
(ii) A et A^2 ont le même rang.
(iii) A et A^2 ont la même image.
(iv) A et A^2 ont le même noyau.
(v) $\mathbb{R}^n$ est somme directe de Im A et Ker A.

b. Donner, pour $n = 2$, un exemple de matrice non nulle n'appartenant à aucun sous-groupe multiplicatif de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Montrer que pour que les cinq propriétés de I.3.a soient vérifiées par A, il faut et il suffit qu'il existe une matrice $X \in \mathfrak{M}_n$ telle que

$$AX = XA, \quad X^2A = X \quad \text{et} \quad A^2X = A.$$

d. Etablir que dans ce cas la matrice X est unique.

e. Comparer X à A' et en déduire, avec les notations de I.2.c, que A' est semblable à

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où A_1^{-1} est l'inverse de A_1 dans $GL_r(\mathbb{R})$. Pour A fixé, A' dépend-il du groupe $\mathcal{G}$ auquel A appartient ?

4.a. Soit $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n$ avec $B_1 \in GL_r(\mathbb{R})$ et $r < n$. Montrer que B appartient à un groupe multiplicatif de matrices et que B' est de la forme $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où on calculera $C_1 \in GL_r(\mathbb{R})$ et C_2 en fonction de B_1 et B_2.

b. Calculer A' pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

II

Dans cette partie, on se fixe une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche les matrices $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les égalités

$$AX = XA \qquad X^2A = X$$

et telles que, de plus, il existe un entier $i \geqslant 0$ pour lequel $A^{i+1}X = A^i$.

1.a. Etablir que pour tout entier $\ell \geqslant 0$ on a $X^{\ell+1}A^\ell = X$.

page 66 1986 Ecole Polytechnique Option M'.Math 2

b. Soit Y une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec A et qui vérifie les égalités $Y^2A = Y$ et, pour un entier $j \geqslant 0$ convenable, $A^{j+1}Y = A^j$; montrer que le produit $X^{m+1}A^{m+1}Y$ est commutatif pour m entier assez grand. En déduire l'unicité de X.

c. Quelle est la matrice X dans chacun des deux cas $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^n$ et $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^2 \neq \{0\}$?

d. Quelle est la matrice X si A est nilpotente ?

2. Dans toute la fin de cette partie II, on suppose que A n'est pas nilpotente et n'appartient pas à $GL_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que la suite $(\operatorname{Im} A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain indice k et que $\mathbb{R}^n$ est somme directe de $\operatorname{Im} A^k$ et de $\operatorname{Ker} A^k$.

b. Soit s le rang de A^k. L'entier s peut-il être égal à 0 ou à n ? Etablir l'existence d'une matrice $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$$

où $C_1 \in GL_s(\mathbb{R})$ et $N_1^k = 0$. En posant :

$$C = R\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}R^{-1} \qquad \text{et} \qquad N = R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}R^{-1}$$

calculer CN et NC, comparer A et C+N, ainsi que $\operatorname{Im} C$ et $\operatorname{Im} C^2$.

c. En déduire l'existence de la matrice X, qu'on notera désormais A^ω, en comparant cette matrice à C'.

d. Comparer les valeurs propres de A^ω à celles de A.

3. Soit p un polynôme à coefficients réels.

a. Quelles valeurs doivent avoir les polynômes matriciels $p(C_1)$ et $p(N_1)$ pour que $p(A) = A^\omega$?

b. Soit q_1 le polynôme caractéristique de C_1. Montrer qu'il existe deux polynômes u et v d'une variable ξ à coefficients réels tels que

$$u(\xi)\,q_1(\xi) + v(\xi)\,\xi^{k+1} = 1 .$$

En déduire à l'aide de v l'expression d'un polynôme p tel que $p(A) = A^\omega$.

c. Quelle relation y a-t-il entre q_1 et le polynôme caractéristique q de A ? Décrire une méthode de calcul de $A^\omega = p(A)$ et appliquer cette méthode au cas de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

III

Dans cette partie, on considère l'équation différentielle

$$\mathcal{E} \qquad L\,x' + M\,x = 0$$

où L et M sont des matrices constantes appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, avec $L \notin GL_n(\mathbb{R})$ et où x est une fonction de la variable réelle t à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose d'abord M inversible.

a. Montrer qu'il existe une matrice $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que x est solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $y = R^{-1}x$ est solution sur $\mathbb{R}$ soit de l'équation

$$y = N_1\,y' \qquad \text{(cas i)}$$

soit de l'équation

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} y' \qquad \text{(cas ii)}$$

où N_1 est nilpotente et où $C_1 \in GL_s(\mathbb{R})$ pour un entier s convenable.

b. Trouver la solution de $\mathcal{E}$ dans le cas i.

c. Dans le cas ii, en posant $A = -M^{-1}L$ et en définissant A^ω comme dans la partie II, comment l'exponentielle de tA^ω permet-elle de trouver une solution de $\mathcal{E}$ passant par le point $(0,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, pour un choix de a qu'on précisera.

d. Lorsqu'elle existe, la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy pour $\mathcal{E}$ est-elle unique ?

2. On considère maintenant le cas où M est non inversible, et on suppose qu'il existe un réel α tel que $\alpha L+M$ soit inversible. Comment peut-on ramener ce cas à celui résolu dans la question III.1 ?

3. On suppose dans cette question qu'il existe $n+1$ réels distincts α_i tels que, pour tout $i=0,\ldots,n$, la matrice $\alpha_i L+M$ n'appartienne pas à $GL_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que le problème de Cauchy pour $\mathcal{E}$ relatif au point (0,0) admet des solutions de la forme $\sum_{i=0}^{n} x_i\,e^{\alpha_i t}$ où les x_i sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ vérifiant des conditions qu'on précisera. Ce problème de Cauchy admet-il une solution unique ?

b. D'après ce qui précède, existe-t-il un réel α tel que $\alpha L+M$ soit inversible ? La réponse à cette question pouvait-elle être obtenue sans faire intervenir l'équation $\mathcal{E}$?

♦

Ecole Polytechnique
Option M'. Math 2
1986
page 67